Groupe A

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 3 h

Soit β une fonction continue croissante de $]a, b[$ dans $\mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ telle que $\lim_{\substack{r \to a \\ r > a}} \beta(r) = -\infty$ et $\lim_{\substack{r \to b \\ r < b}} \beta(r) = +\infty$.

On se propose d'établir l'existence et certaines propriétés de la solution u de l'équation $\frac{du}{dt} + \beta(u) = 0$ sur $]0, 1[$ avec $u(0) = u_0$ donné dans $]a, b[$, puis $u_0 = a$.

Dans les deux premières parties, on traite quelques questions préliminaires.

I

1° Montrer que pour tout $r \in \mathbf{R}$ et tout $t > 0$, il existe $s \in]a, b[$ unique solution de $s + t\,\beta(s) = r$. On pose $s = J_t(r)$.

2° Prouver que la fonction $r \longmapsto J_t(r)$ est croissante et que pour tous $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, on a $|J_t(r_1) - J_t(r_2)| \leqslant |r_1 - r_2|$.

3° Montrer que pour tout $r \in]a, b[$, on a $|J_t(r) - r| \leqslant t\,|\beta(r)|$.

4° Déduire de 2° et 3° que pour tout $r \in [a, b]$:

$$\lim_{t \to 0} J_t(r) = r.$$

II

1° Soit E un espace métrique complet et soit T une application de E dans E telle que pour un entier $p \geqslant 1$ et un nombre k, $0 < k < 1$, on ait pour tous $x, y \in E$ $d(T^p x, T^p y) \leqslant k\,d(x, y)$ (où T^p désigne l'application T itérée p fois).

Montrer qu'il existe alors $u \in E$ unique tel que $Tu = u$ (on pourra commencer par faire la démonstration pour $p = 1$ en considérant la suite des itérés $\{T^n z\}$ où z est arbitrairement fixé dans E. On traitera le cas général en appliquant à T^p le résultat précédent).

2° On désigne par $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, muni de la norme $\|u\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u(t)|$. Soit : $L : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction vérifiant pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

$$|L(x) - L(y)| \leqslant K\,|x - y| \quad (K \in \mathbf{R} \text{ fixé}).$$

On définit $T : E \longrightarrow E$ par $Tu(t) = u_0 + \int_0^t L(u(s))\,ds$ avec $u_0 \in \mathbf{R}$.

Prouver qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ et un nombre $k < 1$ tels que pour tous $u, v \in E$ $\|T^p u - T^p v\| \leqslant k\,\|u - v\|$.

En conclure que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, il existe une fonction dérivable $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ unique telle que $\frac{du}{dt} = L(u)$ sur $[0, 1]$ avec $u(0) = u_0$.

III

1° On pose pour $\lambda > 0$, $\beta_\lambda(r) = \beta(J_\lambda(r))$. Montrer que l'équation $\frac{du_\lambda}{dt} + \beta_\lambda(u_\lambda) = 0$ sur $[0, 1]$ avec $u_\lambda(0) = u_0$ admet une solution unique u_λ.

2° On suppose u_0 dans $]a, b[$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $\lambda > 0$ $|\beta_\lambda(u_\lambda(t))| = \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leqslant |\beta(u_0)|$

(Soit $h > 0$ fixé; vérifier à l'aide de la croissance de β_λ que

$$(u_\lambda(t + h) - u_\lambda(t))\,\frac{d}{dt}\,(u_\lambda(t + h) - u_\lambda(t)) \leqslant 0$$

et en déduire que

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leqslant \left|\frac{du_\lambda}{dt}(0)\right|).$$

3° Montrer que $u_\lambda(t)$ converge uniformément vers une limite $u(t)$ lorsque $\lambda \to 0$. (Appliquant la croissance de β, noter que

$$(J_\lambda(u_\lambda) - J_\mu(u_\mu))\frac{d}{dt}(u_\lambda - u_\mu) \leqslant 0$$

et décomposer $J_\lambda(u_\lambda) - J_\mu(u_\mu)$ en $J_\lambda(u_\lambda) - u_\lambda + u_\lambda - u_\mu + u_\mu - J_\mu(u_\mu)$.
En déduire à l'aide de 2° que $\{u_\lambda\}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,1])$ lorsque $\lambda \to 0$).

4° Prouver en utilisant 2° que pour tout $t \in [0,1]$, $u(t) \in]a,b[$, puis que $\beta_\lambda(u_\lambda(t)) \to \beta(u(t))$ uniformément sur $[0,1]$ lorsque $\lambda \to 0$.

En conclure le résultat suivant : pour tout $u_0 \in]a,b[$, il existe une fonction u unique, dérivable de $[0,1]$ dans $]a,b[$, telle que

$$\frac{du}{dt} + \beta(u) = 0 \text{ sur } [0,1] \text{ avec } u(0) = u_0. \tag{1}$$

(Pour l'unicité, on notera que si u_1 et u_2 sont deux solutions, on a

$$\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 \leqslant 0).$$

5° Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|u(t) - u_0| \leqslant t|\beta(u_0)|$.

IV

On se propose maintenant d'établir qu'il existe une fonction v unique continue de $[0,1]$ dans $[a,b]$, dérivable sur $]0,1[$, telle que $v(t) \in]a,b[$ pour $0 < t \leqslant 1$ et $\frac{dv}{dt} + \beta(v) = 0$ sur $]0,1[$ avec $v(0) = a$.
On prouve enfin que $|v(t) - a|$ et $|J_t a - a|$ sont des infiniment petits du même ordre lorsque $t \to 0$.

1° Soit u solution de (1). Montrer que u vérifie

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqslant \frac{1}{t}|u_0 - u(t)| \text{ pour tout } t \in]0,1[.$$

A cet effet, on pourra utiliser le théorème de la moyenne et le fait que la fonction $t \longmapsto \left|\frac{du}{dt}(t)\right|$ est décroissante (à établir en s'aidant de la suggestion de III, 2°).

2° Soient $u_0, \hat{u}_0 \in]a,b[$ et soient u et $\hat{u}$ respectivement solutions de

$$\frac{du}{dt} + \beta(u) = 0 \text{ avec } u(0) = u_0, \quad \frac{d\hat{u}}{dt} + \beta(\hat{u}) = 0 \text{ avec } \hat{u}(0) = \hat{u}_0.$$

Montrer que $|u(t) - \hat{u}(t)| \leqslant |u_0 - \hat{u}_0|$ pour tout $t \in [0,1]$.

3° Soit u_n solution de $\frac{du_n}{dt} + \beta(u_n) = 0$ avec $u_n(0) = u_{0n}$ où u_{0n} est une suite qui décroît vers a. Déduire de 1° et 2° que u_n converge uniformément vers une fonction v vérifiant les propriétés suivantes :

(i) v est continue sur $[0,1]$, $v(0) = a$ et $v(t) \in]a,b[$ pour $t > 0$

(ii) sur $]0,1[$, v est dérivable et $\frac{dv}{dt} + \beta(v) = 0$.

(On notera que $\beta(u_n) \to \beta(v)$ uniformément sur $[\delta,1]$ $\forall\, \delta > 0$).

Prouver l'unicité d'une fonction vérifiant (i) et (ii).

4° Montrer que l'on a pour tout $t \in]0,1]$:

$$|a - v(t)| \leqslant 3|a - J_t a| \quad \text{et} \quad |a - J_t a| \leqslant 3|a - v(t)|$$

A cet effet, on établira que pour tout $u_0 \in]a,b[$, $|a - J_t a|$ et $|a - v(t)|$ sont majorés par $2|a - u_0| + t|\beta(u_0)|$. Conclure à l'aide de choix convenables de u_0.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail